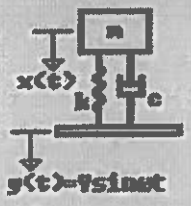
1) (2 val)O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base.



a) (50%) Definir transmissibilidade absoluta TR_{abs} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

b) (50%) Definir transmissibilidade relativa TR_{rel} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

2) (1 val)Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, amortecido e com condições iniciais nulas, caracterizar sucintamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (25%) solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$;
b) (25%) solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$;
c) (25%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t = \tau$;
d) (25%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$.

3) (1 val)A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema. Para um sistema amortecido com um grau de liberdade,

a) (60%) Definir e estabelecer a expressão da função de resposta em frequência de tipo receptância;
b) (40%) Representar graficamente a função de resposta em frequência mobilidade sob a forma do diagrama de Bode e do diagrama de Nyquist, indicando aspectos notáveis destas representações.

4) (1 val)Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

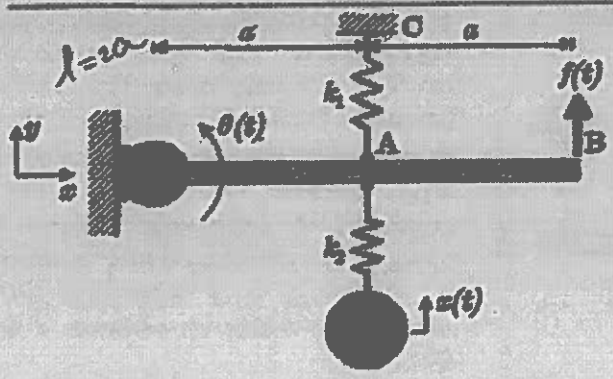
c) (50%) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração;
d) (50%) Caracterizar, justificando, a frequência natural e o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

5) (2 val)O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\} = \{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\} = \{\dot{x}\}_0$. A resposta do sistema pode ser determinada por integração directa das equações do movimento ou por análise modal.

a) (25%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;
b) (25%) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a selecção dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.
c) (25%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.
d) (25%) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento. Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

6) (1 val) Responder, em alternativa, à questão 6.1 ou 6.2.

→



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma barra rígida de massa m_1, de comprimento ℓ, articulada no ponto O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de constante de rigidez k_1 e sobre a qual actua uma força $f(t)$ no ponto B. No ponto A está ligada uma mola linear elástica de constante de rigidez k_2 da qual está suspensa uma massa concentrada m_2. As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $x(t)$.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para

$$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad m_1 = 6m \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\,\text{m},$$

b) (15%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 25600$ N/m e $m = 1$ kg,

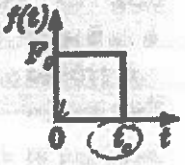
d) (20%) Determinar a amplitude $\Theta(\omega)$ da resposta da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 178$ rad/s. Esboçar graficamente a variação da amplitude $\Theta(\omega)$ em função da frequência de excitação ω, assinalando eventuais pontos notáveis.

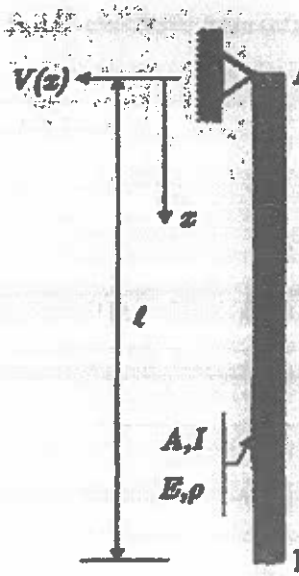
e) (20%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_0 = 0.0137$ s. Comentar.

Nota:



$$J_G = \frac{1}{12}m\ell^2$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2º ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está apoiada na extremidade $x = 0$ e está livre na extremidade $x = \ell$, conforme se representa na figura.

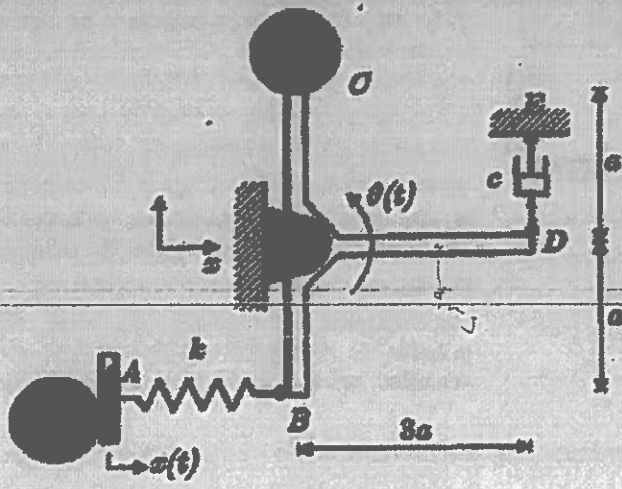
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (15%) Discutir, justificando, as condições de aplicabilidade da função $V(x) = \alpha x - \delta \sin\frac{\pi}{\ell}x$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função.

c) (30%) Calcular a energia potencial máxima, a energia cinética máxima e o quociente de Rayleigh para determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

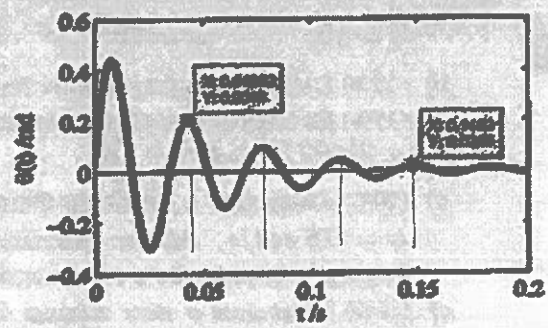
d) (30%) Determinar o valor óptimo do parâmetro α e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado. Comparar com a solução exacta. Comentar.

e) (10%) Determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.



1) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por duas barras rígidas ligadas em T e por uma massa concentrada m (ponto C). O sistema oscila ($\theta(t)$) em torno do ponto O por acção de um deslocamento $x(t)$ aplicado no ponto A por um excêntrico. O movimento imposto $x(t)$ transmite-se ao sistema através de uma mola de rigidez k e é controlado por um amortecedor viscoso de constante c (ponto D).

Num ensaio em regime livre, foi registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico.



Determinar,

a) (10%) a razão de amortecimento ξ;

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia das barras, estabelecer:

c) (30%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

Para os valores numéricos $a = 0.5\ \text{m}$ e $k = 5\times10^4\ \text{N/m}$, determinar:

d) (10%) a massa concentrada m;

Para um deslocamento harmónico $x(t) = X\sin\omega t$ com $\omega = 360\,\text{rad/s}$, a amplitude de vibração da massa m é igual a $10\,\text{mm}$.

e) (20%) determinar a amplitude X do deslocamento imposto;

f) (20%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que asseguram uma amplitude $\Theta(\omega)$ inferior a 5°.

Exame 1ª chamada :: 2004/06/20

PARTE TEÓRICA

⑤

a) A técnica da análise modal assenta no facto de ao se aplicar uma transformação linear com a matriz modal, às características generalizadas $\{x(t)\}$ conjuntamente com a propriedade de ortonormalidade dos vectores modais se conseguir o desacoplamento simultâneo em termos elásticos e em termos de inércia das n equações do movimento, sendo cada uma das equações idêntica à equação diferencial de movimento do sistema com 1 grau de liberdade, no caso de regime não amortecido. Se o regime for amortecido, apenas se consegue o desacoplamento se a matriz de amortecimento verificar a condição de Caughey (ou uma condição mais restrita : condições de proporcionalidade).

b) A análise modal truncada consiste na determinação da resposta do sistema considerando apenas alguns modos naturais do sistema, isto é, utilizando uma base modal truncada de dimensão p com $p \ll n$. Assim sendo o esforço de cálculo pode ser substancialmente reduzido e não raras vezes sem grande perda de precisão nos valores obtidos. De referir que os modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada devem ser os modos que mais contribuem para a resposta do sistema, nomeadamente, os modos que estão contidos na banda de frequência do espectro da solicitação aplicada.

c) Os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o reg. forçado amortecido quando a matriz de amortecimento verifica as condições de Caughey, ou mais redutoramente as condições de proporcionalidade :

$$[C] = \alpha [m] + \beta [k]$$

No sistema de eq. diferenciais, com $\{x(t)\} = [\phi]\{\eta(t)\}$, vem:

$$[m][\phi]\{\ddot{\eta}(t)\} + (\alpha[m] + \beta[k])[\phi]\{\dot{\eta}(t)\} + [k][\phi]\{\eta(t)\} = \{f(t)\}$$

Pre-multiplicando por $[\phi]^T$ e considerando as propriedades de ortogonalidade dos vectores modais ($[\phi]^T[m][\phi] = [I]$ e $[\phi]^T[k][\phi] = [\Omega^2]$)

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{(\alpha[I] + \beta[\Omega^2])}_{(\alpha + \beta\Omega^2) = 2\xi p}\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T\{f(t)\}$$

↳ matriz diagonalizada c.q.d

d) Os métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento assentam nos seguintes pressupostos:

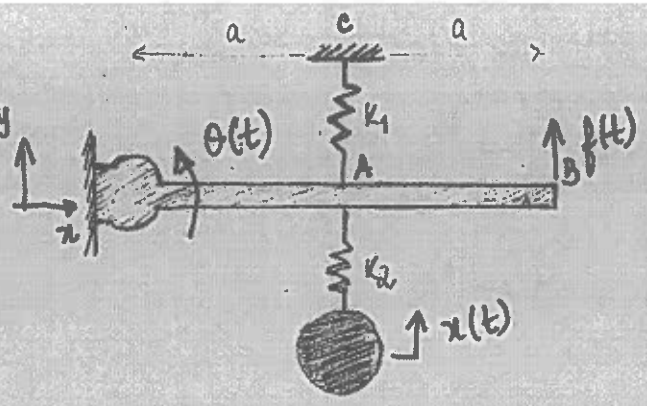
- verificação da equação diferencial apenas em instantes discretos t_i, separados por intervalos de tempo Δt, e não para todo o valor da variável t.
- estabelecimento de determinado tipo de variação do deslocamento $x(t)$, da velocidade $\dot{x}(t)$ ou da aceleração $\ddot{x}(t)$ dentro de cada intervalo de tempo Δt.

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: baseia-se na aproximação da velocidade e da aceleração, respectivamente as derivadas $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ do deslocamento, em termos dos valores discretos do deslocamento $x(t_i)$, de modo que o sistema de equações diferenciais conduz a 1 sistema de eq. algébricas.

↳ Caracterização: é um método explícito de integração uma vez que a obtenção da resposta em deslocamento $\{x\}^{t+\Delta t}$ no instante $t = t_i + \Delta t$ é feita a partir da eq. de equilíbrio dinâmico no instante $t = t_i$. De referir que para o cálculo de $\{x\}^{t+\Delta t}$ também é necessário $\{x\}^{t-\Delta t}$, pelo que o método não possui arranque próprio.

PARTE PRÁTICA

②.



$\ell = 2a$

$a = 0{,}5\ m$
$K_1 = 10K$
$K_2 = 2K$
$m_1 = 6m$
$m_2 = m$

a) Equações de movimento do sistema

Equações de Lagrange $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i}$

→ Energia cinética : $T = \frac{1}{2} J_0^b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$$J_0^b = J_A + m\overline{OA}^2 = \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + \frac{1}{4} m_1 \ell^2 = \frac{1}{3} m_1 \ell^2$$

$$T = \frac{1}{2} J_0^b \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{x}(t)\right]^2$$

→ Energia potencial : $V = \frac{1}{2} k\theta^2$

$$V = \frac{1}{2} K_1 \left(\ell/2 \underbrace{\operatorname{sen}\theta(t)}_{\theta(t)}\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(x(t) - \ell/2\,\theta(t)\right)^2$$

→ Forças não conservativas :

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial}{\partial \theta}(\ell \operatorname{sen}\theta) = f(t)\, \ell \underbrace{\cos\theta}_{=1} = f(t) \cdot \ell$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial}{\partial x}(\ell \operatorname{sen}\theta) = f(t) \times 0 = 0$$

Substituindo pelos valores :

$$T = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 6m \times (2a)^2\right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = 4ma^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \times 10K \times \frac{(2a)^2}{4} \theta^2 + \frac{1}{2} \times 2K \times \left(x - \frac{2a}{2}\theta\right)^2 = 5Ka^2\theta^2 + K(x - a\theta)^2$$

$Q_1 = f(t) \times 2a$

Considerando as eqs. de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dT}{d\theta} + \frac{dV}{d\theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) - \frac{dT}{dx} + \frac{dV}{dx} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{dT}{d\dot{\theta}} = 8ma^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\theta}}\right) = 8ma^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \quad ; \quad \frac{dV}{d\theta} = 10ka^2\theta + 2ak(x - a\theta)$$

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{dV}{dx} = 2k(x - a\theta)$$

Assim:

$$\begin{cases} 8ma^2\ddot{\theta}(t) + 10ka^2\theta(t) - 2ak(x(t) - a\theta(t)) = f(t)\cdot 2a \\ m\ddot{x}(t) + 2k(x(t) - a\theta(t) = 0 \end{cases}$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8ma^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k & -2ak \\ -2ak & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t)\cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Frequências e formas modais de vibração.

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta(w) \\ x(w) \end{Bmatrix} \cos(wt - \phi)$$

$$\left[[k] - w^2[m]\right] \cdot \begin{Bmatrix} \theta(w) \\ x(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10Ka^2 + 2a^2K - w^2 \cdot 8ma^2 & -2aK \\ -2aK & 2K - w^2 m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta(w) \\ x(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo $a = 0{,}5\,m$:

$$\begin{vmatrix} 10K0{,}5^2 + 2\cdot 0{,}5^2 K - w^2 \cdot 8m\,0{,}5^2 & -2\cdot 0{,}5\cdot K \\ -2\times 0{,}5\times K & 2K - w^2 m \end{vmatrix} = 0 \qquad w^2 = \frac{K}{m}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad w_2 = 1{,}5811\sqrt{\frac{K}{m}} \quad (rad/s)$$

Formas naturais:

1ª forma natural:

$$-2\times 0{,}5K\cdot\theta(w) + \left(2K - m\cdot\frac{K}{m}\right)x(w) = 0$$

$$-K\cdot\theta(w) + (2K - K)x(w) = 0 \quad \therefore \quad x(w) = \frac{K}{2K-K}\theta(w)$$

$$x(w) = \theta(w) \quad \therefore \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural:

$$-2\times 0{,}5K\cdot\theta(w) + \left(2K - m\cdot 1{,}5811^2\cdot\frac{K}{m}\right)x(w) = 0$$

$$-K\theta(w) + (2K - 2{,}5K)x(w) = 0$$

$$x(w) = \frac{K}{2K-2{,}5K}\theta(w) \quad \therefore \quad x(w) = -2\,\theta(w)$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

c) $$\{\phi_1\} = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \cdot \{u\}_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T [m] \{u\}_2}} \{u\}_2 = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Eq. de movimentos:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3m} & 1/\sqrt{6m} \\ 1/\sqrt{3m} & -2/\sqrt{6m} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t)\cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + K/m \cdot \eta_1(t) = 1/\sqrt{3m} \cdot f(t) & (1) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 2.5\, K/m \cdot \eta_2(t) = 1/\sqrt{6m}\, f(t) & (2) \end{cases}$$

d) Para $K = 25600$ N/m e $m = 1$ kg → $w_1 = 160$ rad/s, $w_2 = 253$ rad/s

Considerando $w = 178$ rad/s para $f(t) = F\cos wt$

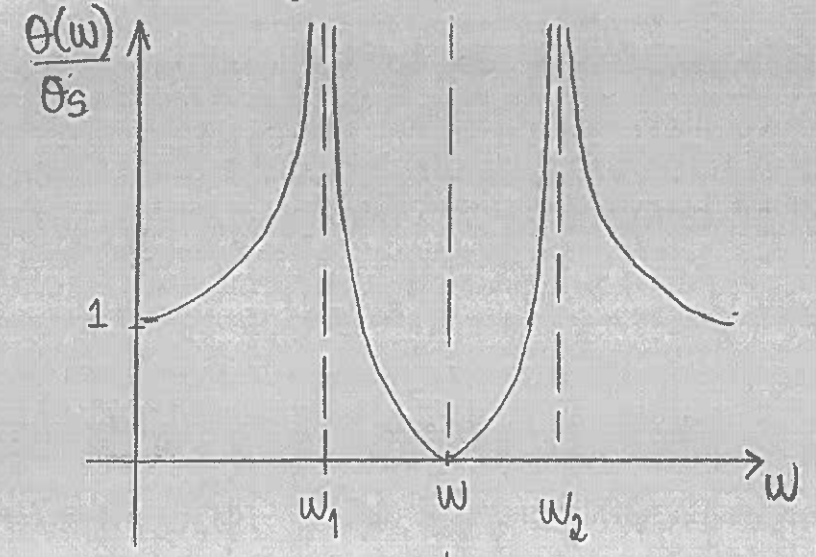
$$\begin{bmatrix} 10Ka^2 + 2a^2K - 8ma^2w^2 & -2aK \\ -2aK & 2K - mw^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(w) \\ x(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\theta(w) = \frac{(2K - mw^2)(F\cdot 2a) - (-2aK)\times 0}{(10Ka^2 + 2a^2K - 8ma^2w^2)(2K - mw^2) - (-2aK)^2}$$

Substituindo pelos valores:

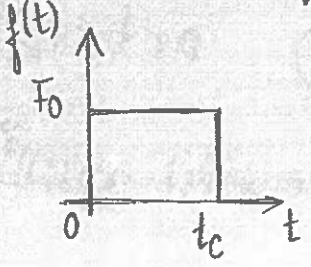
$$\theta(w) = -4{,}963 \times 10^{-5} F$$

Representação gráfica de $\theta(w)$ em função de w:



↳ $(2K - mw^2) \times 2aF = 0 \therefore w = 226{,}3\ rad/s$

e) Solicitação $f(t)$ transiente com $t_c = 0{,}0137\ s$.



$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25600 & 0 \\ 0 & 64000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3}\, F_0 \\ 1/\sqrt{6}\, F_0 \end{Bmatrix} (\mu(t) - \mu(t$$

$$\frac{T_m}{2} = \frac{\pi}{w_m} \therefore \quad \frac{T_m}{2} = \frac{\pi}{w_1} = \frac{\pi}{160} = 0{,}01963\ s > t_c$$

$$\frac{T_m}{2} = \frac{\pi}{w_2} = \frac{\pi}{253} = 0{,}01242\ s < t_c$$

$\underline{0 \leq t \leq t_c} \therefore \quad x(t) = \frac{F_0}{K_r}(1 - \cos w_m t)$

$$\eta_1(t) = \frac{F_0/\sqrt{3}}{25600}(1 - \cos 160\, t)$$

$$\eta_2(t) = \frac{F_0/\sqrt{6}}{64000}(1 - \cos 253 t)$$

$t > t_c$ $\therefore$ $x(t) = \frac{F_0}{K}\left(\cos\omega_n(t-t_c) - \cos\omega_n t\right)$

$$\eta_1(t) = \frac{F_0/\sqrt{3}}{25600}\left(\cos 160(t-0{,}0137) - \cos 160t\right)$$

$$\eta_2(t) = \frac{F_0/\sqrt{6}}{64000}\left(\cos 253(t-0{,}0137) - \cos 253t\right)$$

Como:

$$\{x(t)\} = [\phi]\{\eta(t)\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\theta(t)\\ x(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1/\sqrt{3}\,\eta_1(t)\\ 1/\sqrt{3}\,\eta_1(t)\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}1/\sqrt{6}\,\eta_2(t)\\ -2/\sqrt{6}\,\eta_2(t)\end{Bmatrix}$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) - \frac{2}{\sqrt{6}}\eta_2(t)$$

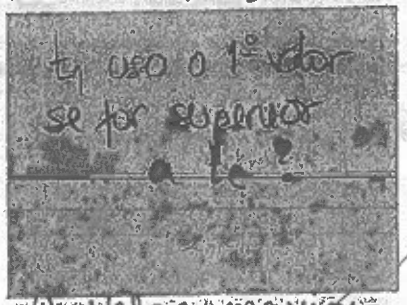
$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{76800}(1-\cos 160t) - \frac{F_0}{192000}(1-\cos 253t) & 0 \le t \le t_c \\ \frac{F_0}{76800}(\cos(160(t-0{,}0137)) - \cos(160t)) - \frac{F_0}{192000}(\cos(253(t-0{,}0137)) + \cos(253t)) & t > t_c \end{cases}$$

Calculando o máximo de resposta $x(t)$:

Para $0 \le t \le t_c$ $\therefore$ $\dot{x}(t) = 0 \rightarrow t_1 = 0\,s \vee t = 0{,}0122$

$$x(t)_{max}\Big|_{t=t_c} \cong F_0 \times 1{,}05\times10^{-5}\ (m)$$

Para $t \ge t_c$ $\therefore$ $\dot{x}(t) = 0 \rightarrow t_1 = 0{,}0209\,s$ $\quad t_c = 0{,}0137\,s$

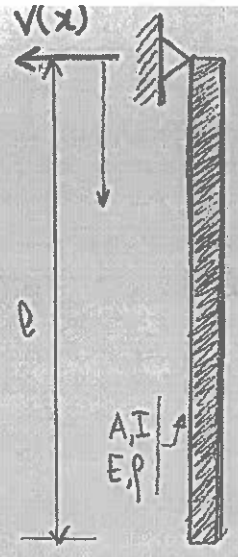


$$x(t)_{max}\Big|_{t=} \cong F_0 \times 2{,}22\times10^{-5}\ (m)$$

O valor máximo de resposta ocorre depois do tempo de choque e é $F_0 \times 2{,}22\times10^{-5}$

MAL RESOLVIDO !

5.



a) Condições fronteiro

$x=0 \therefore$ (1) $V(0)=0$ } geométrica

(2) $EI \left.\frac{d^2V(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0$

$x=\ell \therefore$ (3) $EI \left.\frac{d^2V(x)}{dx}\right|_{x=\ell} = 0$ } natural

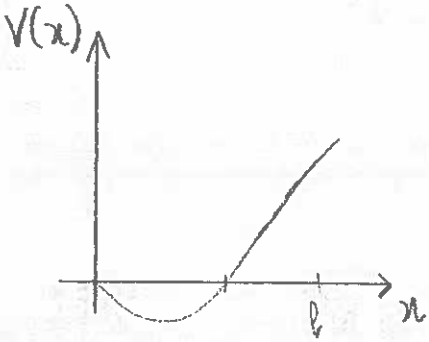
(4) $EI \left.\frac{d^3V(x)}{dx}\right|_{x=\ell} = 0$

b) $V(x) = \alpha x - \delta \operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}x$

$\frac{dV(x)}{dx} = x - \delta\cdot\frac{\pi}{\ell}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$

$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \delta\frac{\pi^2}{\ell^2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)$ Derivável pelo menos 2 vezes. ✓

$V(0) = 0 - \delta \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0} = 0$ Estabelece a C.F. geométrica ✓



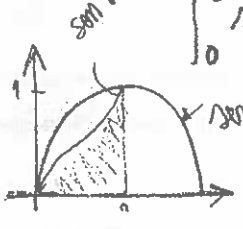
c) $T_{máx} = \frac{1}{2}w^2\int_0^\ell \rho A\, V^2(x)\,dx = \frac{1}{2}w^2\cdot\rho A\int_0^\ell\left(\alpha x - \delta\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)^2 dx$

$= w^2\frac{\rho A}{2}\left(\alpha^2\cdot\frac{\ell^3}{3} - \int_0^\ell\left(2\alpha x\cdot\delta\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)dx + \int_0^\ell \delta^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)dx\right) =$

$= w^2\frac{\rho A}{2}\left(\alpha^2\cdot\frac{\ell^3}{3} - 2\alpha\delta\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) - \frac{\ell}{\pi}\cdot x\cos\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right]_0^\ell + \delta^2\cdot\underbrace{\frac{\ell}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times 2}\right)$

$= w^2\frac{\rho A}{2}\left(\alpha^2\cdot\frac{\ell^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{\ell^2}{\pi} + \frac{\delta^2\ell}{2}\right)$

$\int_0^\ell \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)dx$



Area $= 2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\right)$ ⟸

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\left(\delta\frac{\pi}{\ell^2}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^{\ell} \frac{\delta^2\pi^4}{\ell^4}\cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right) dx =$$

$$= \frac{EI}{2}\cdot\frac{\delta^2\pi^4}{\ell^4}\int_0^{\ell} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right) dx = \frac{EI}{2}\cdot\frac{\delta^2\pi^4}{\ell^4}\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\ell}{2}\times 2\right)$$

$$= \frac{EI}{2}\left(\frac{48{,}705\,\delta^2}{\ell^3}\right)$$

$$R(V(x)) = w^2 = \frac{\frac{EI}{2}\left(\frac{48{,}705\,\delta^2}{\ell^3}\right)}{\frac{\rho A}{2}\left(\frac{\alpha^2\ell^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{\ell^2}{\pi} + \frac{\delta^2\ell}{2}\right)} = \frac{EI\,(48{,}705\,\delta^2)}{\rho A\ell^3\left(\frac{\alpha^3\ell^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{\ell^2}{\pi} + \frac{\delta^2\ell}{2}\right)}$$

$$w = \sqrt{R(V(x))} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}}\cdot\frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{\alpha^2\ell^2}{3} - 2\alpha\delta\frac{\ell}{\pi} + \frac{\delta^2}{2}}}$$

d) $$\frac{dR(V(x))}{d\alpha} = 0 \therefore \frac{EI}{\rho A\ell^3}\cdot\frac{-\left(\frac{2\alpha\ell^2}{3} - \frac{2\delta\ell}{\pi}\right)\cdot 48{,}705\,\delta^2}{\left(\frac{\alpha^2\ell^2}{3} - 2\delta\alpha\frac{\ell}{\pi} + \delta^2\right)} = 0$$

$$\frac{2\alpha\ell^2}{3} - \frac{2\delta\ell}{\pi} = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{3\delta}{\pi\ell}$$

$$w^R = \sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}}\cdot\frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{9\delta^2\ell^2}{\pi^2\ell^2\times 3} - 2\left(\frac{3\delta}{\pi\ell}\right)\frac{\delta\ell}{\pi} + \frac{\delta^2}{2}}} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}}\cdot\frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{\delta^2}{2} - \frac{3\delta^2}{\pi^2}}}$$

$$w^R_{optimo} = \frac{6{,}979}{\sqrt{\frac{1^2}{2} - \frac{3}{\pi^2}}}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}} = 15{,}7625\sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}}$$

Solução exata: (pg. 334)

$\beta_2 l = 3{,}9266$

$$w_2 = 3{,}9266^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = 15{,}418 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

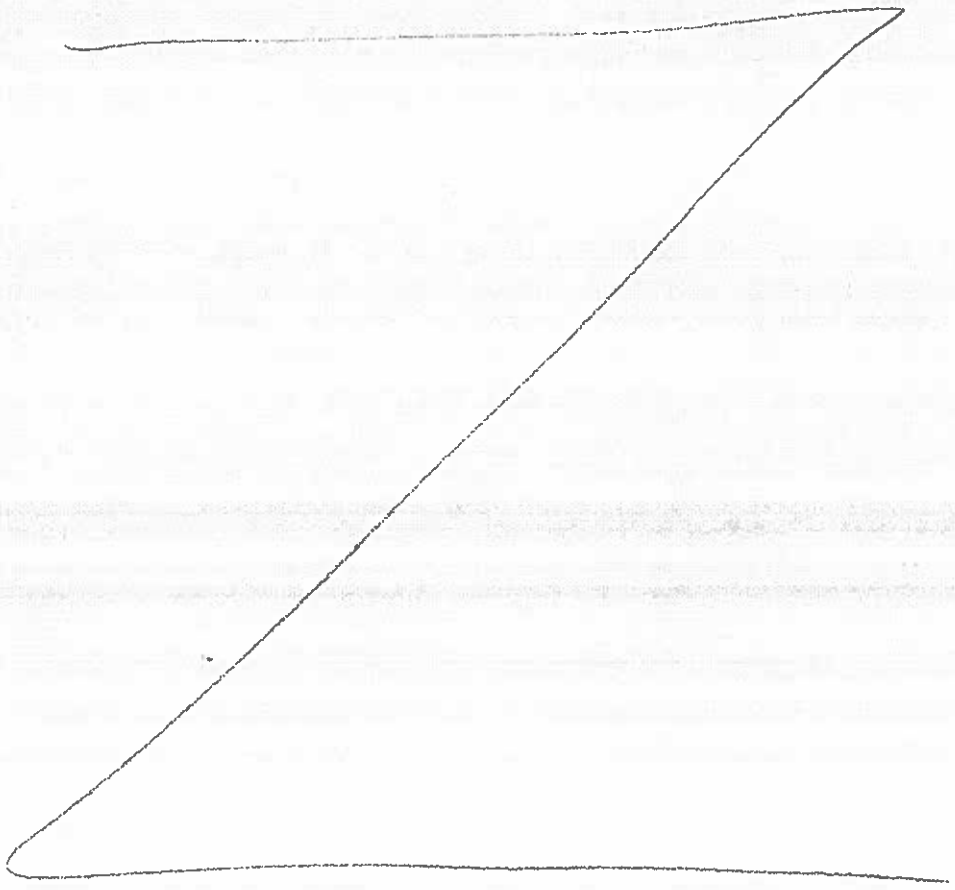
$$Erro = \frac{|w_R - w_2|}{w_2} \times 100 = \frac{|15{,}7625 - 15{,}418|}{15{,}418} \times 100 = 2{,}23\%$$

e) $V(x) = 0$

$$\alpha x - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} \cdot x = 0$$

$$\frac{3\delta}{\pi l} x - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} \cdot x = 0 \quad \therefore \quad \frac{3}{\pi l} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} \cdot x$$

$$\boxed{x = 0{,}74713\, l}$$



Vibrações e Ruído

2ª Parte

Exame de 1ª Chamada de 2007-06-20

Parte Teórica

5). a) A técnica da análise modal assenta no facto de ao se aplicar uma transformação linear com a matriz modal às coordenadas generalizadas $\{x(t)\}$ conjuntamente com a propriedade de ortonormalidade dos vectores modais se conseguir o desacoplamento simultâneo em termos elásticos e em termos de inércia das n equações de movimento, sendo cada uma as equações idêntica à equação diferencial de movimento de sistema com um grau de liberdade, no caso do regime não amortecido. Se o regime for amortecido, apenas se consegue o desacoplamento se a matriz de amortecimento verificar a condição de Caughey (ou uma condição mais restrita: condição de proporcionalidade).

b) A análise modal truncada consiste na determinação da resposta do sistema considerando apenas alguns modos naturais do sistema, isto é, utilizando uma base modal truncada de dimensão p com $p \ll n$. Assim sendo o esforço de cálculo pode ser substancialmente reduzido e não raras vezes sem grande perda de precisão nos valores obtidos. De referir

que os modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada devem ser os modos que mais contribuem para a resposta do sistema, nomeadamente, os modos que estão contidos na banda de frequências do espectro da solicitação aplicada.

c) como referia em a), apenas quando a matriz de amortecimento verifica as condições de Caughey (ou, mais redutoramente, as condições de proporcionalidade). Condição de proporcionalidade:

$$[C] = \alpha [m] + \beta [K]$$

Então ao sistema de eq. dif. e sendo: $\{x(t)\} = [\Phi] \{q(t)\}$

$$[m][\Phi]\{\ddot{q}(t)\} + \left(\alpha [m] + \beta [K]\right)[\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [K][\Phi]\{q(t)\} = \{f(t)\}$$

Pre-multiplicando por $[\Phi]^T$ e considerando a prop. de ortonormalidade dos vectores modais: $[\Phi]^T [m] [\Phi] = [I]$ e $[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega^2]$

$$\{\ddot{q}(t)\} + \underbrace{\left(\alpha [I] + \beta [\Omega^2]\right)}_{(\alpha+\beta)[\Omega^2]} \{\dot{q}(t)\} + [\Omega^2]\{q(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

Que são matrizes diagonalizadas C.q.d.

d) Os métodos de integração directa das eq. diferenciais de movimento apoiam nos seguintes pressupostos:

- verificação da eq. diferencial apenas em instantes discretos t_i separados por intervalos de tempo Δt, i não para todo o valor da variável t
- estabelecimento de determinado tipo de variação do deslocamento $x(t)$, da velocidade $\dot{x}(t)$ ou da aceleração $\ddot{x}(t)$ dentro de cada intervalo de tempo Δt

O método das diferenças finitas baseia-se na caracterização da velocidade ($\dot{x}(t)$) e da aceleração ($\ddot{x}(t)$) da resposta do sistema através do valor do deslocamento $x(t)$ em pontos discretos do domínio da eq. diferencial de movimento, formando o sistema de equações diferenciais num sistema de equações algébricas.

↳ Característica do método: é um método explícito de integração que a obtenção da resposta em deslocamento $\{x\}^{t+\Delta t}$ no instante $t = t_i + \Delta t$ é feita a partir da equação de equilíbrio dinâmico no instante $t = t_i$. Os valores que foram para o cálculo de $\{x\}^{t+\Delta t}$ também é necessário $\{x\}^{t-\Delta t}$ pelo que o método não tem arranque próprio (pelo menos no caso do método das diferenças finitas centradas)

6.1 a) Propriedade de ortonormalidade em relação à massa

$$\int_0^l \rho A \, U_r(x) \, U_s(x) \, dx = \delta_{rs} \qquad r, s = 1, 2, \ldots, \infty$$

com $\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$

Propriedade de ortonormalidade em relação à rigidez:

$$\int_0^{\ell} \frac{d U_s(x)}{dx} E A(x) \frac{d U_n(x)}{dx} dx = \delta_{n,s} \qquad n,s = 1, \dots, \infty$$

$$\text{com} \quad \delta_{ns} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = s \\ 0 & \text{se } n \neq s \end{cases}$$

b) $\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\, \eta_n(t) \qquad n = 1, 2, \dots, \infty$

Considerando que: $f(x,t) = p(x)\, g(t)$ e indo à eq. dif:

$$\rho A \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\, \ddot{\eta}_n(t) \right) - \frac{d}{dx} \left(E A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d U_n(x)}{dx} \right) \eta(t) = p(x)\, g(t)$$

Multiplicando por $U_s(x)$ e integrando para o comprimento ℓ da barra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \int_0^{\ell} \rho A\, U_s(x)\, U_n(x)\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^{\ell} U_s(x) \frac{d}{dx} \left(E A \frac{d U_n(x)}{dx} \right) dx$$

$$= \left(\int_0^{\ell} U_s(x)\, p(x)\, dx \right) \cdot g(t)$$

Integrando por partes e 2º termo $= 0$ (cond. fr.)

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^{\ell} U_s(x) \frac{d}{dx} \left(E A \frac{d U_n(x)}{dx} \right) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) U_s(x) E A \frac{d U_n(x)}{dx} \Big]_0^{\ell}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^{\ell} \frac{d U_s(x)}{dx} E A \frac{d U_n(x)}{dx} dx$$

Ficando o sistema:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \int_0^l \rho A \, U_s(x) \, U_n(x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^l \frac{d U_s(x)}{dx} EA \frac{d U_n(x)}{dx} dx =$$

$$= \left(\int_0^l U_n(x) \, p(x) \, dx \right) g(t)$$

Assim, pelas propriedades de ortonormalidade em relação à massa (ρA) e à rigidez (EA) conclui-se que se chegou a um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes

c.q.d.

$\boxed{!}$ (confirmar esta!)

6.2

$$\omega_n^2 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^l E I(x) \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \overset{=0}{V_{cfm}}}{\frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \, V(x)^2 \, dx + T^*_{cfm}}$$ ← Sistema contínuo

Mas como neste caso se despreza a massa então temos um sistema discreto com n graus de liberdade. Desta forma o quociente de Rayleigh fica:

$$R(\{v\}) = \frac{\{v\}^T [k] \{v\}}{\{v\}^T [m] \{v\}}$$

Sendo: $\{v\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$ e $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & m_i & \\ & & & \ddots \; m_n \end{bmatrix}$

Para determinar o numerador basta saber que o mesmo representa o dobro da energia potencial máxima do sistema. Ora para cada massa:

$$k_i = \frac{P_i}{Y_i} = \frac{m_i g}{Y_i} \qquad k_{ij} =$$

Logo, a energia potencial

$$\frac{1}{2} k_i Y_i^2 = \frac{1}{2} \frac{m_i g}{X} \cdot Y_i^2 = \frac{m_i g Y_i}{2}$$

Logo o [illegible]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i g Y_i}{2} = g \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i$$

O Denominador [illegible]

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i^2$$

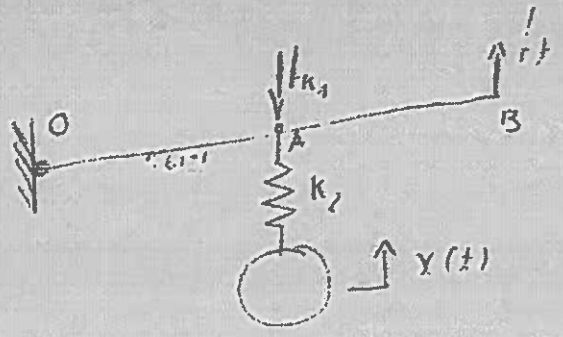
Logo

$$R(\xi_i, \xi_j) = \frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i^2}$$

Como $R(\xi_i, \xi_j) = \omega^2 \Rightarrow \omega = \left[\frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i^2} \right]^{1/2}$ c.q.d

Parte Prática

2. a)



Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{Y}^2$$

$$J_O = J_A + m \overline{OA}^2 \Rightarrow J_O = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$$

$$= J_O = \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_1 l^2 = \frac{m_1 l^2}{3}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} J_O \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{Y}(t)\right]^2$$

Pot.: $V = \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{l}{2} \sin\theta(t)\right)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left[Y(t) - \frac{l}{2}\theta(t)\right]^2$

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{l}{2} \sin\theta\right) = f(t) \frac{l}{2} \cos\theta = f(t) \cdot \frac{l}{2}$$

$$f(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{l}{2} \sin\theta\right) = 0$$

Dados: $K_1 = 10\,k$; $K_2 = 2\,k$; $m_1 = 6\,m$; $m_2 = m$; $l = 0{,}5\,m$

$$T = \frac{\cancel{6}\, m\,(2a)^2}{\cancel{6}}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = 4 m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}\, 10K \cdot \frac{(2a)^2}{4}\,\theta^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} k \left(x - a\cdot\theta\right)^2 = 5K a^2 \theta^2 + k(x - a\theta)^2$$

$$Q_1 = f(t) \cdot 2a$$

Considerando as eq. de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = Q_2 \end{cases}$$

Então:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 8 m a^2 \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 8 m a^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 10 K a^2 \theta - 2ak(x - a\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = k(x - a\theta)$$

Concluí-se que as eq. do sistema são:

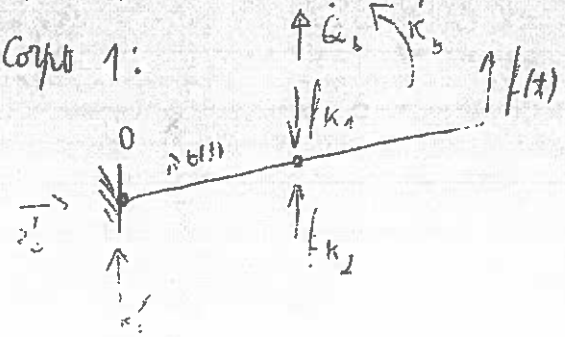
$$\begin{cases} 8 m_1 a^2 \ddot{\theta}(t) + 10 k a^2 \theta(t) - 2ak\left(x(t) - a\theta(t)\right) = f(t) \cdot 2a \\ m\ddot{x}(t) + 2k\left(x(t) - a\theta(t)\right) = 0 \end{cases}$$

Forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 8ma^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k & -2ak \\ -2ak & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a) Vou usar a Mecânica Newtoniana (não era pedido)

Corpo 1:



$$\sum M_0 = k_L$$

$$\vec{Q}_b = m \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta} a \\ 0 \end{vmatrix} = m_1 \begin{vmatrix} 0 \\ \ddot{\theta} a \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_b = \vec{K}_G + \vec{OG} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_1 (2a)^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ m_1 \ddot{\theta} a \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} m_1 (2a)^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \ddot{\theta} a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \underbrace{m_1}_{6m} a^2 \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$f_{k_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -k_1 a\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad f_{k_2} = \begin{vmatrix} c \\ +k_2 (x - a\theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$

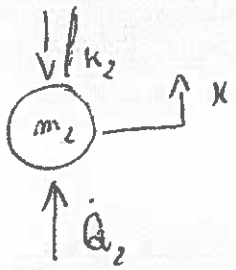
Então, a 1ª eq. de movimento fica:

$$-a(\overset{10k}{\overset{''}{k_1}} a\theta) + a \overset{2k}{\overset{''}{k_2}} (x - a\theta) + f(t) \cdot 2a = \frac{4}{3}(6m) a^2 \ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{8 m a^2 \ddot{\theta}(t) + 10 a^2 k \theta(t) - 2a k (x(t) - a\theta(t)) = f(t) \cdot 2a}$$

Igual à 1ª eq. obtida pelo método lagrangiano

Corpo 2:



$$\Sigma F^y = \dot{Q}_1^y \Rightarrow -\overset{2k}{\overset{''}{k_2}} (x - a\theta) = \overset{m}{\overset{''}{m_2}} \ddot{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m \ddot{x}(t) + 2k (x(t) - a\theta(t)) = 0}$$

Igual à 2ª eq. obtida pelo método Lagrangeano

b) Fazendo:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k - 8ma^2\omega^2 & -2ak \\ -2ak & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Então, fazendo $a = 0,5\ m$

$$\begin{vmatrix} 10k\,0,5^2 + 2\times 0,5^2 k - 8m\,0,5^2\omega^2 & -2\times 0,5\,k \\ -2\times 0,5\,k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \vee \quad \omega_2 \cong 1,5811\sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$$

Formas modais:

Modo 1:

$$-2\times 0,5\,k\,\Theta(\omega) + \left(2k - m\frac{k}{m}\right) X(\omega) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(\omega) = \frac{k}{2k-k}\,\Theta(\omega) \Leftrightarrow X(\omega) = \Theta(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Modo 2:

$$-2\times 0,5\,k\,\Theta(\omega) + \left(2k - m\left(2,5\frac{k}{m}\right)\right) X(\omega) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(\omega) = \frac{k}{-0,5\,k}\,\Theta(\omega) \Rightarrow X(\omega) = -2\,\Theta(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

c)

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u_1\}}} \{u\}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0{,}5774 \\ 0{,}5774 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0{,}4082 \\ -0{,}8165 \end{Bmatrix}$$

as eq. de movimento ficam:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}{\omega_1^2} & 0 \\ 0 & \underset{\omega_2 = \text{[illegible]}}{\omega_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} f(t)\, 2\overset{0{,}5}{a} \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25\,600 & 0 \\ 0 & 64000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} f(t) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} f(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25600\, \eta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 64000\, \eta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} f(t) \end{cases}$$

d) 1ª Eq.:

$$\ddot{\eta}_1(t) + 25600\,\eta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} F \cos(178t)$$

$$\eta_1(t) = \frac{\frac{F/\sqrt{3}}{25600}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\underbrace{\xi}_{=0}\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Como: $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{178}{\sqrt{\frac{25600}{1}}} = 1{,}1125 > 1 \Rightarrow \phi = \pi$

$$\eta_1(t) \cong 9{,}490 \times 10^{-5} F \cos(178t - \underbrace{\phi}_{\pi})$$

2ª Eq.:

$$\ddot{\eta}_2(t) + 64000\,\eta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos(178t) \qquad \phi = 0$$

Usando a mesma fórmula, com $\beta = \frac{\omega}{\omega_2} = 0{,}7036 < 1$, $\omega_2 = 1{,}5811\sqrt{\frac{25600}{1}}$

$$\eta_2(t) = \frac{\frac{F/\sqrt{6}}{64000}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{178}{1{,}5811\sqrt{\frac{25600}{1}}}\right)^2\right]^2 + (2\underbrace{\xi}_{=0}\beta)^2}} \cos(178t - \underbrace{\phi}_{0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta_2(t) \cong 1{,}263 \times 10^{-5} F \cos(178t - \underbrace{\phi}_{0})$$

Então: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Rightarrow \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2(t)$$

$\Leftrightarrow \quad \theta(t) = 5{,}479 \times 10^{-5} F \underbrace{\cos(178t - \pi)}_{-\cos(178t)} + 5{,}156 \times 10^{-6} F \cos(178t) =$

$\Leftrightarrow \quad \theta(t) = -4{,}963 \times 10^{-5} F \cos(178t)$

Logo: $\boxed{\theta(\omega) = 4{,}963 \times 10^{-5} F \ [rad]}$.

Dúvida: Se os ϕ não fossem 0 e π rad como fazíamos para determinar $\theta(\omega)$?

OUTRA FORMA DE CALCULAR $\theta(\omega)$:

pág. 156

$$\begin{bmatrix} 10ka^2 + 2a^2k - 8ma^2\omega^2 & -2ak \\ -2ak & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

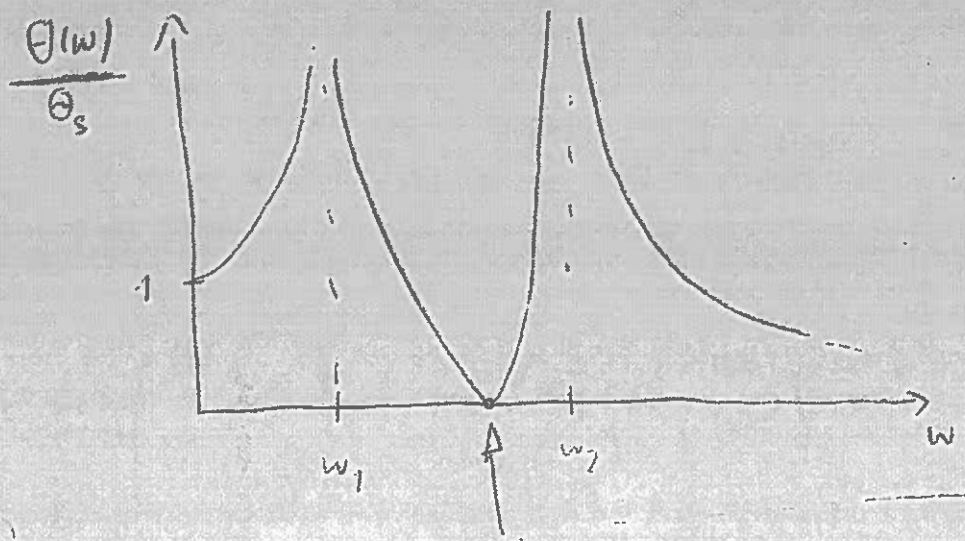
Substituindo valores $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta(\omega) = \frac{(2k - m\omega^2) \cdot 2aF - (-2ak) \times 0}{(10ka^2 + 2a^2k - 8ma^2\omega^2)(2k - m\omega^2) - (-2ak)(-2ak)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(\omega) = -4{,}963 \times 10^{-5} F}$$

R Exactamente o mesmo resultado! Mas muito mais rapidamente

Representação gráfica de $\Theta(\omega)$ em função de ω:



$$\boxed{(2K - m\omega^2)\cdot 2aF = 0 \Rightarrow \omega \cong 226{,}3 \text{ rad/s}}$$

e) Esta [illegible] 1º método que [illegible] para [illegible]:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25600 & 0 \\ 0 & 64000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3}\ F_0 \\ 1/\sqrt{6}\ F_0 \end{Bmatrix} \mu(t)$$

$$\frac{T_n}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\,\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_1 = 160 \text{ rad/s}} \cong 0{,}01963 \text{ s} > t_c = 0{,}0137 \text{ s}$$

$$\frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{\omega_2 = 252{,}982 \text{ rad/s}} \cong 0{,}01242 \text{ s} < t_c = 0{,}0137 \text{ s}$$

Para $0 \leq t \leq \overset{t_c}{0{,}137}$:

$$\eta_1(t) = \frac{F_0/\sqrt{3}}{25600}\left(1 - \cos 160\, t\right)$$

$$\eta_2(t) = \frac{F_0/\sqrt{6}}{64000}\left(1 - \cos 252{,}982\, t\right)$$

Para $t > 0{,}0137$ s:

$$\eta_1(t) = \frac{F_0/\sqrt{3}}{25600}\left(\cos 160(t-0{,}0137) - \cos 160t\right)$$

$$\eta_2(t) = \frac{F_0/\sqrt{6}}{64000}\left(\cos 252{,}98(t-0{,}0137) - \cos 252{,}98t\right)$$

Como: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

$$\{y(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2(t) \\ \frac{-2}{\sqrt{6}}\eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

Logo:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1(t) - \frac{2}{\sqrt{6}}\eta_2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{76800}(1-\cos 160t) - \frac{F_0}{192\,000}(1-\cos 252{,}98t) & ; 0 \le t \le \overset{0{,}0137\text{ s}}{t_c} \\ \frac{F_0}{76800}\left(\cos 160(t-0{,}0137) - \cos 160t\right) - \frac{F_0}{192\,000}\left(\cos 252{,}98(t-0{,}0137) - \cos 252{,}98t\right) & ; t > t_c \end{cases}$$

Para calcular o máximo:

$$0 \le t \le 0{,}0137 \longrightarrow \dot{x}(t) = 0 \overset{\text{máquina}}{\Longrightarrow} t_1 = 0{,}0 \ \vee \ t_2 \cong \cancel{0{,}0222} \ \wedge \ \vee \ldots$$

Então: $x(t)_{max}\Big|_{t=0{,}0137} \cong F_0 \times 1{,}045 \times 10^{-5}$ [m]

$$t > 0{,}0137 \longrightarrow \dot{x}(t) = 0 \overset{\text{máquina}}{\Longrightarrow} t_1 \cong 0{,}0530 \text{ s} \ \vee \ t_2 \cong \ldots$$

VD

Então:

$$t > 0{,}0137\ s \rightarrow y(t)_{max}\Big|_{t=0{,}0530\ s} \cong \boxed{F_0\ 2{,}865 \times 10^{-5}} \quad [m]$$

R: Conclui-se que o valor máximo da resposta ocorre depois do tempo de choque e é igual a $F_0 \cdot 2{,}865 \times 10^{-5}$ m.

3. a)

$$v(0,t) = 0 \Rightarrow V(0) = 0 \qquad \text{Cond. geométrica}$$

$$EI\,\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{l^2 V(0)}{dx^2} = 0 \qquad \text{Cond. natural}$$

$$EI\,\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V(l)}{dx^2} = 0 \qquad \text{cond. natural}$$

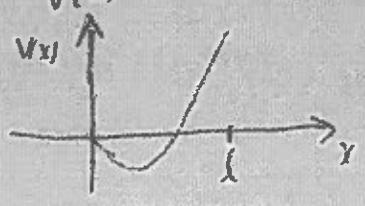
$$EI\,\frac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \frac{d^3 V(l)}{dx^3} = 0 \qquad \text{cond. natural}$$

b) $$\frac{dV(x)}{dx} = \alpha - \frac{\delta\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l}x$$

$$\frac{l^2 V(x)}{dx^2} = \delta\frac{\pi^2}{l^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}x$$

derivada pela 2 vezes ✓

$V(0) = 0 - \delta \sin 0 = 0$ compatível com as cond. fronteira geométricas



c)

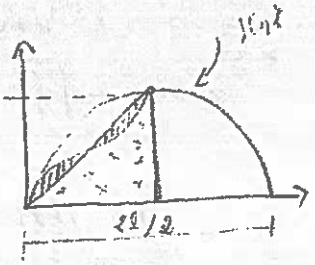
$$T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\alpha x - \delta \sin \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx + \underbrace{I^* \ldots}_{=0} \right) =$$

$$= \omega^2 \frac{\rho A}{2} \left(\alpha^2 \frac{l^3}{3} - \int_0^l 2 \alpha \delta x \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx + \int_0^l \delta^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx \right) =$$

$$= \omega^2 \frac{\rho A}{2} \left[\alpha^2 \frac{l^3}{3} - 2\alpha\delta \left(\frac{l^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) - \frac{l}{\pi} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) \right)_0^l + \right.$$

$$\left. + \delta^2 \frac{l}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 \right] = \omega^2 \frac{\rho A}{2} \left[\alpha^2 \frac{l^3}{3} - 2\alpha\delta \frac{l^2}{\pi} + \frac{\delta^2 l}{2} \right]$$

$\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx$



Área $= 2 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \times \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$V_{flex} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \underbrace{V^* \ldots}_{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2} \left[\frac{-15{,}503\, \delta^2 \left(l \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) - \pi x \right)}{l^4} \right]_0^l =$$

$$= \frac{EI}{2} \left[\frac{-15{,}503\, \delta^2 (-\pi l)}{l^4} \right] = \frac{EI}{2} \left(\frac{48{,}705\, \delta^2}{l^3} \right)$$

$$R(V(x)) = w^2 = \frac{\frac{EI}{2}\left(\frac{48{,}705\,\delta^2}{l^3}\right)}{\frac{\rho A}{2}\left(\frac{\alpha^2 l^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{l^2}{\pi} + \frac{\delta^2 l}{2}\right)} = \frac{EI \cdot 48{,}705\,\delta^2}{\rho A \cdot l^3\left(\frac{\alpha^2 l^3}{3} - 2\alpha\delta\frac{l^2}{\pi} + \frac{\delta^2 l}{2}\right)}$$

$$\text{logo: } w = \sqrt{R(V(x))} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cdot \frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{\alpha^2 l^2}{3} - \frac{2\alpha\delta l}{\pi} + \frac{\delta^2}{2}}}$$

d) $$\frac{d\,R(V(x))}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{-\left(\frac{2\alpha l^2}{3} - \frac{2\delta l}{\pi}\right) 48{,}705\,\delta^2}{\left(\frac{\alpha^2 l^2}{3} - \frac{2\alpha\delta l}{\pi} + \frac{\delta^2}{2}\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha l^2}{3} - \frac{2\delta l}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3 \times 2\delta l}{2 l^2 \pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{3\delta}{\pi l}$$

Então:

$$w^{GR}_{\alpha} = \frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{9\delta^2 l^2}{3\pi^2 l^2} - \frac{6\delta^2 l}{\pi l} + \frac{\delta^2}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6{,}979\,\delta}{\sqrt{\frac{\delta^2}{2} - \frac{3\delta^2}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^{GR}_{\alpha\,ótimo} = \frac{6{,}979}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \simeq 15{,}7625 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Solução exacta:

Pág 359:

$$\beta_2 l = 3{,}9266 \Rightarrow \omega_2 = 3{,}9266^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_2 \cong 15{,}4182 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Comparação:

$$\text{Err} = \frac{|\omega^{ER} - \omega_2|}{\omega_2} \times 100 \cong 2{,}23\ \%$$

a) $V(x) = 0 \Rightarrow \alpha x - \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3\delta}{\pi l} x - \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x \cong 0{,}74713\, l}$$